Преобразования координат в электродинамике

Рассуждения о специальной теории относительности не обходятся без упоминания ковариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца (и нековариантности относительно преобразований Галилея). Хотя не все представляют себе конкретно, в чем там дело.

В современных учебниках ковариантность уравнений электродинамики легко доказывается на основе 4-мерного формализма. Быть может, кого-то это не убеждает, или вообще остается непонятым. Здесь я покажу, каким путем рассуждали основоположники СТО.

Предполагаю, что формулы **преобразований Лоренца** известны:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$$

Для краткости использовано общепринятое обозначение: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Ради простоты разберем ситуацию, когда отсутствуют заряды и токи: $\rho = 0$, $j = 0$. Даже и в этом случае выкладки будут громоздкими, я попытаюсь провести их предельно подробно. Как принято в теоретической физике, будем использовать гауссову систему.

Запишем известное **уравнение электродинамики**:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = rot\mathbf{H}\ .$$

Используя определение ротора, для электрического поля по оси x получаем:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\ . \qquad (1)$$

Задача – выразить это уравнение через «штрихованные» координаты, то есть перейти к движущейся со скоростью v инерциальной системе отсчета (ИСО). Для этого сделаем некоторые подготовительные выкладки.

Сначала преобразуем $\dfrac{\partial E_x}{\partial t}$. Согласно известным правилам обращения с частными производными:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}\ .$$

Из формул преобразований Лоренца путем дифференцирования получаем:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma\ ,\ \frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma v\ .$$

Очевидно также, что:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} = \frac{\partial H_z}{\partial y},\ \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{\partial H_y}{\partial z}.$$

Теперь уравнение (1) приобретает вид:

$$\frac{\gamma}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} + \frac{\partial E_x}{\partial x'}\frac{\gamma v}{c}. \qquad (1')$$

Оставим его до поры в покое, и запишем второе **уравнение электродинамики**:

$$div\mathbf{E} = 0$$

(напоминаю: для пустого пространства).

Через проекции вектора это будет выглядеть так:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \qquad (2)$$

Перейдем к «штрихованным» координатам. Займемся членом $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ (а с остальными все тривиально). Итак:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}.$$

Снова обращаемся к формулам Лоренца:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma,\ \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{\gamma v}{c^2}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \gamma\frac{\partial E_x}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\gamma v}{c^2}.$$

Осталось подставить это в (2), и заодно учесть, что:

$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y'}$, $\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z'}$. И получаем (перенося члены):

$$\gamma\frac{\partial E_x}{\partial x'} = \frac{\gamma v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{\partial E_z}{\partial z'} \qquad (2')$$

Умножим (2') на $\frac{v}{c}$ (вскоре будет ясно, для чего):

$$\frac{\gamma v}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x'} = \frac{\gamma v^2}{c^3}\frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{v}{c}\frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{v}{c}\frac{\partial E_z}{\partial z'}. \qquad (2'')$$

А теперь вернемся к уравнению (1'), заметив, что в нем также фигурирует $\frac{\gamma v}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x'}$. Подставим туда из (2''):

$$\frac{\gamma}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} + \frac{\gamma v^2}{c^3}\frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{v}{c}\frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{v}{c}\frac{\partial E_z}{\partial z'}.$$

Сделаем перегруппировку:

$$\frac{\gamma}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'}-\frac{\gamma v^2}{c^3}\frac{\partial E_x}{\partial t'}=\frac{\partial H_z}{\partial y'}-\frac{\partial H_y}{\partial z'}-\frac{v}{c}\frac{\partial E_y}{\partial y'}-\frac{v}{c}\frac{\partial E_z}{\partial z'}.$$

Еще немного преобразований:

$$\frac{\gamma}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial E_x}{\partial t'}=\frac{\partial H_z}{\partial y'}-\frac{\partial H_y}{\partial z'}-\frac{v}{c}\frac{\partial E_y}{\partial y'}-\frac{v}{c}\frac{\partial E_z}{\partial z'}.$$

Осталось сообразить, что $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{1}{\gamma^2}$, и приходим к окончательному уравнению:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial y'}\gamma\left(H_z-\frac{v}{c}E_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\gamma\left(H_y+\frac{v}{c}E_z\right). \qquad (3)$$

Введем обозначения:

$$E_x'=E_x,\ H_z'=\gamma\left(H_z-\frac{v}{c}E_y\right),\ H_y'=\gamma\left(H_y+\frac{v}{c}E_z\right). \qquad (4)$$

Тогда (3) совпадет с (1) с точностью до штрихов, а (4) будут формулами пересчета полей в движущуюся систему координат. Их можно дополнить еще тройкой формул, получаемых аналогичным образом из уравнений для других осей (вывод опустим):

$$H_x'=H_x,\ E_y'=\gamma\left(E_y-\frac{v}{c}H_z\right),\ E_z'=\gamma\left(E_z+\frac{v}{c}H_y\right).$$

Доказательство ковариантности завершено? Пока еще нет. Посмотрим, что получится, если вместо преобразований Лоренца применить **преобразования Галилея**:

$$x'=x-vt$$

$$y'=y$$

$$z'=z$$

$$t'=t$$

Аналогично предыдущему (но гораздо проще) можно получить:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial t'}-v\frac{\partial E_x}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial x'}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'}=\frac{\partial H_z}{\partial y'}-\frac{\partial H_y}{\partial z'}-\frac{v}{c}\left(\frac{\partial E_y}{\partial y'}+\frac{\partial E_z}{\partial z'}\right),$$

Или, окончательно:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial y'}\left(H_z-\frac{v}{c}E_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(H_y+\frac{v}{c}E_z\right).$$

Достаточно ввести обозначения:

$$E_x'=E_x,\ H_z'=H_z-\frac{v}{c}E_y,\ H_y'=H_y+\frac{v}{c}E_z$$

— и мы опять пришли к уравнению (1). Только здесь преобразования полей несколько другие – без множителя Лоренца. Собственно говоря, формулы преобразования можно было получить, пренебрегая $\frac{v^2}{c^2}$.

Дополним их остальными формулами, вывести которые столь же просто:

$$H_x' = H_x,\ E_y' = E_y - \frac{v}{c}H_z,\ E_z' = E_z + \frac{v}{c}H_y.$$

А теперь, используя эти преобразования, попробуем вернуться назад к исходной ИСО, произведя обратное преобразование, к примеру, для H_z (надо будет вместо v брать $-v$).

$$H_z'' = H_z' + \frac{v}{c}E_y' = H_z - \frac{v}{c}E_y + \frac{v}{c}\left(E_y - \frac{v}{c}H_z\right) = H_z\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Произведя последовательно прямое и обратное преобразование, мы должны были получить снова H_z. Но не получили! Итак, преобразования Галилея в электродинамике некорректны.

Попробуем то же, но с формулами, выведенными из преобразования Лоренца:

$$H_z'' = \gamma\left(H_z' + \frac{v}{c}E_y'\right) = \gamma\left[\gamma\left(H_z - \frac{v}{c}E_y\right) + \frac{\gamma v}{c}\left(E_y - \frac{v}{c}H_z\right)\right] = \gamma^2 H_z\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = H_z.$$

Преобразования обращаются, как и должно быть. Вот теперь доказательство завершено.

Литература

1. А. Эйнштейн. К электродинамике движущихся тел

2. Х. А. Лоренц. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света